一般選抜　１次　1月22日　数学

I　(a)　赤玉２個，黒玉４個，白玉３個が入った袋から２個の玉を同時に取り出す．取り出された玉が２個とも黒玉である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，赤玉１個と黒玉１個が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり，黒玉１個と白玉１個が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

(b)　赤玉，黒玉，白玉があわせて16個入った袋から２個の玉を同時に取り出すとき，赤玉１個，黒玉１個を取り出す確率が $\dfrac{1}{5}$，黒玉１個，白玉１個を取り出す確率が $\dfrac{1}{3}$ であった．赤玉，黒玉，白玉の個数をそれぞれ x，y，z とすると，$xy = \boxed{\text{キク}}$，$yz = \boxed{\text{ケコ}}$ である．袋に入っていた赤玉，黒玉，白玉の個数はそれぞれ $\boxed{\text{サ}}$ 個，$\boxed{\text{シ}}$ 個，$\boxed{\text{ス}}$ 個である．

(c)　赤玉３個，黒玉５個，白玉７個が入った袋から３個の玉を同時に取り出す．赤玉，黒玉，白玉が１個ずつ取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である．取り出された玉の色が２種類であったとき，その中に赤玉が２個入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である．

II　座標平面上に3点A(0, 5), B(7, 4), C(6, −3)がある.

この3点を通る円Sの半径は $\boxed{\text{ア}}$, 中心は$\left(\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}\right)$である. 2点B, Cを結ぶ短い方の弧の長さは$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$, △ABCの面積は $\boxed{\text{カキ}}$ であり, △ABCの内接円の半径は $\boxed{\text{ク}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-1\right)$となる.

点Bと点D(−1, 4)を通り, y軸に平行な軸を持ち, 円Sと3つの点を共有する放物線の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}x^2-\boxed{\text{シ}}\,x+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

と

$$y=-\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}x^2+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}x+\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である. この2つの放物線で囲まれた部分の面積は$\dfrac{\boxed{\text{ニヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$である.

III $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ および $\boxed{ク}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ．

正の実数を定義域とする関数 $f(x) = \log_e x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(a) 曲線 $y = f(x)$ 上の相異なる 3 点 $(s,\ f(s))$，$(t,\ f(t))$，$(u,\ f(u))$ を頂点とする三角形の重心は $\mathrm{G}\left(\boxed{ア},\ f\left(\boxed{イ}\right)\right)$ である．

$y = f(x)$ は，そのグラフが $\boxed{ウ}$ 関数であり，三角形の重心 G は

$$x > 0,\quad \boxed{エ}$$

で表される領域に存在する．また，$s = e^3$，$u = e^4$，$s < t < u$ である場合，この三角形の面積は

$$t = e^{\boxed{オ}}\left(\boxed{カキ} + e\right)$$

のとき最大となる．

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ の解答群

① $s + t + u$	② $\dfrac{s + t + u}{3}$	③ $\sqrt{s + t + u}$
④ $st + tu + us$	⑤ $(st + tu + us)^2$	⑥ stu
⑦ $(stu)^{\frac{1}{3}}$	⑧ $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{u}$	⑨ $\left(\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{u}\right)^{-1}$

$\boxed{ウ}$ の解答群

① 下に凸で単調増加な	② 下に凸で単調減少な
③ 上に凸で単調増加な	④ 上に凸で単調減少な
⑤ 変曲点を 1 つもつ単調増加な	⑥ 変曲点を 1 つもつ単調減少な
⑦ 下に凸で極小値を 1 つもつ	⑧ 上に凸で極大値を 1 つもつ
⑨ 周期的で微分可能な	

$\boxed{エ}$ の解答群

① $y > f(x)$	② $y < f(x)$	③ $y > f\left(\dfrac{x}{2}\right)$
④ $y < f\left(\dfrac{x}{2}\right)$	⑤ $\lvert y\rvert > f(x)$	⑥ $\lvert y\rvert < f(x)$
⑦ $3y > f(x)$	⑧ $y < 3f(x)$	

(b) 数列$\{f(a_n)\}$が公差 -3 の等差数列となるのは，数列$\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$が $\boxed{\text{ク}}$ 場合であり，

$$\log_b(a_2 \cdot a_{2021}) - \log_b(a_1)^2 = \boxed{\text{ケコ}}, \qquad \text{ただし } b = \frac{a_{44}}{a_1}$$

が成り立つ．この数列が $\sum_{k=1}^{5} f(a_k) = 0$ を満たすとき，$f(a_n) = \boxed{\text{サシ}}\,n + \boxed{\text{ス}}$ であり，次式が成り立つ．

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_5 = \boxed{\text{セ}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{e^{\boxed{\text{ソ}}}}{e^{\boxed{\text{タ}}} - 1}$$

このとき，5以上の整数 n に対し，座標平面上の点$(0,\ f(|f(a_n)|))$を P_n，$(n,\ f(|f(a_n)|))$を Q_n とすると，台形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n は

$$S_n = \left(n + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)\log_e\left(1 + \frac{1}{\boxed{\text{テト}} + n}\right)$$

であり，$\lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ．

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① 公差 -3 の等差数列である

② 公差 $\frac{1}{e^3}$ の等差数列である

③ 公差3の等差数列の逆数からなる数列である

④ 公差 $-\log_e 3$ の等差数列である

⑤ 公比 -3 の等比数列である

⑥ 公比 $\frac{1}{e^3}$ の等比数列である

⑦ 公比 $-\log_e 3$ の等比数列である

⑧ $a_n = \frac{n!}{3}$ と表される

⑨ $a_n = \frac{1}{3\,n!}$ と表される

(c) 正の整数 n に対して $T_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$，$T_0 = 0$ とする．$0 \leqq m \leqq 100$ の範囲で整数 m が変化するとき，$T_{100} - T_m - \mathrm{T}_{100-m}$ の最小値は $\boxed{\text{ニ}}$ であり，最大となるのは $m = \boxed{\text{ヌネ}}$ のときである．