一般選抜　１次　1月21日　数学

I (1) 三角関数について，次の関係式が成り立つ．

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{アイ}}\sin^2\theta + \boxed{\text{ウ}},$$

$$\sin 3\theta = \boxed{\text{エオ}}\sin^3\theta + \boxed{\text{カ}}\sin\theta.$$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数

$$y = -\frac{1}{12}\sin 3\theta + \frac{3}{8}\cos 2\theta - \frac{3}{4}\sin\theta$$

は，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ をとり，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ をとる．また，y の極値を与える θ の個数は $\boxed{\text{ナ}}$ である．

Ⅱ $\boxed{\text{ツ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ.
自然対数の底を e として，以下の問いに答えよ.

(1) C を積分定数として，指数関数と単項式の積の不定積分について，次式が成り立つ.

$$\int xe^{-3x}\,dx = -\left(\frac{\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)e^{-3x}+C$$

$$\int x^2e^{-3x}\,dx = -\left(\frac{\boxed{\text{エ}}\,x^2+\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\right)e^{-3x}+C$$

また，定積分について，

$$\int_0^1 \left|(9x^2-1)e^{-3x}\right|dx = \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\left(-1+\boxed{\text{コ}}\,e^{\boxed{\text{サシ}}}-\boxed{\text{スセ}}\,e^{-3}\right)$$

が成り立つ.

(2) p，q，r を実数の定数とする．関数 $f(x)=(px^2+qx+r)e^{-3x}$ が $x=0$ で極大，$x=1$ で極小となるための必要十分条件は，

$$p=\boxed{\text{ソタ}}\,r,\ \ q=\boxed{\text{チ}}\,r,\ \ \boxed{\text{ツ}}$$

である．さらに，$f(x)$ の極小値が -1 であるとすると，$f(x)$ の極大値は $\dfrac{e^{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ となる.

このとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である.

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

① $r>0$　② $r=0$　③ $r<0$　④ $r>1$　⑤ $r=1$
⑥ $r<1$　⑦ $r>\dfrac{1}{3}$　⑧ $r=\dfrac{1}{3}$　⑨ $r<\dfrac{1}{3}$

III $\boxed{イ}$ ～ $\boxed{オ}$，および $\boxed{サ}$ ～ $\boxed{ス}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ.

(1) 座標平面上の3点A$(-1,0)$，B$(1,0)$，Cを頂点とする三角形について考える．点Cのy座標は正であり，原点をOとして，以下の問いに答えよ.

(a) $\angle BAC < \angle ABC$ を満たす場合，点Cは第 $\boxed{ア}$ 象限に存在する.

(b) $\angle ABC < \angle ACB$ を満たす場合，点Cは $\boxed{イ}$ の $\boxed{ウ}$ に存在する.

(c) $\angle ACB < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす場合，点Cは $\boxed{エ}$ の $\boxed{オ}$ に存在する.

(d) $\angle BAC \leqq \angle ABC \leqq \angle ACB \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす点Cが存在する領域(境界を含む)の面積は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}\pi - \dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ である.

$\boxed{イ}$，$\boxed{エ}$ の解答群

① 点Aを中心とし点Bを通る円

② 点Bを中心とし点Aを通る円

③ 線分ABを直径とする円

④ 離心率が0.5で2点O，Aを焦点とする楕円

⑤ 離心率が0.5で2点O，Bを焦点とする楕円

⑥ 離心率が0.5で2点A，Bを焦点とする楕円

⑦ 線分ABを一辺にもち，重心のy座標が正である正三角形

⑧ 線分ABを一辺にもち，重心のy座標が正である正方形

$\boxed{ウ}$，$\boxed{オ}$ の解答群

① 内部

② 周上

③ 外部

④ 重心

(2) 座標空間内の４点 A$(-1, 0, 0)$，B$(1, 0, 0)$，C$(s, t, 0)$，D を頂点とし，

$$\angle BAC < \angle ABC < \angle ACB$$

を満たす四面体を考える．$t > 0$ であり，点 D の z 座標は正であるとして，以下の問いに答えよ．

(a) $\angle ADC = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす場合，点 D は $\boxed{サ}$ に存在する．

(b) $\angle ADC = \angle BDC = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす場合，点 D の x 座標は s であり，点 D は $\left(s,\ \boxed{シ},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\boxed{ス}$ の円周上にある．

(c) 以下では，$t = \dfrac{4}{3}$ とする．設問(1)の結果から，点 C の x 座標 s は，

$$\boxed{セ} < s < -\boxed{ソ} + \frac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$$

の範囲の値をとりうる．この範囲で s が変化するとき，$\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす四面体 ABCD の体積は，$s = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}$ をとる．

$\boxed{サ}$ の解答群

① 線分 AC の中点を通り直線 AC に垂直な平面上
② 線分 AC を直径とする球面上
③ 線分 AC を直径とする球の内部
④ 点 A を中心とし点 C を通る球面上
⑤ 点 A を中心とし点 C を通る球の内部
⑥ 線分 AC を一辺にもつ正四面体の面上
⑦ 線分 AC を一辺にもつ正四面体の内部
⑧ 離心率が 0.5 で２点 A，C を焦点とする楕円を直線 AC のまわりに１回転させてできる立体の面上
⑨ 離心率が 0.5 で２点 A，C を焦点とする楕円を直線 AC のまわりに１回転させてできる立体の内部

$\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$ の解答群

① s	② t	③ $2s$	④ $2t$	⑤ $\dfrac{s}{2}$
⑥ $\dfrac{t}{2}$	⑦ st	⑧ $\dfrac{s}{t}$	⑨ $\dfrac{s+1}{2}$	⓪ $\dfrac{s-1}{2}$