述語証明可能性論理の包含関係について

倉橋太志（神戸大学）

2020 年 12 月 20 日（日）
証明論研究集会

内容

1. 証明可能性論理と **Solovay** の定理
2. 述語証明可能性論理
3. 今回の研究
    1. **Artemov** の補題とその帰結
    2. Σ_1 証明可能性論理

内容

1. 証明可能性論理と Solovay の定理
2. 述語証明可能性論理
3. 今回の研究

証明可能性述語と導出可能性条件

- 以降，T, T_i は $\mathbf{I\Sigma_1}$ を含む無矛盾かつ再帰的公理化された，算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{0, S, +, \times, <, =\}$ の理論とする．

証明可能性述語と導出可能性条件

- 以降，T, T_i は $\mathbf{I\Sigma_1}$ を含む無矛盾かつ再帰的公理化された，算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{0, S, +, \times, <, =\}$ の理論とする．
- 不完全性定理の証明においては，“x は T において証明可能” を意味する Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$（T の証明可能性述語）で，次の導出可能性条件を満たすものを作ることが重要であった．

導出可能性条件

任意の論理式 φ, ψ について，

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
- $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$
- $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ の性質を調べることによって，不完全性定理周辺の理解を深めたい．

命題様相論理 GL

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
- $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$
- $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$
- **(Löb の定理)** $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

命題様相論理 GL

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
- $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$
- $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$
- **(Löb の定理)** $\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

$\mathrm{Pr}_T(x)$ の満たすこれらの性質を，様相論理を用いて分析する．

命題様相論理 GL

命題様相論理 **GL** の公理と推論規則は次の通り：

A1 命題様相論理の言語の恒真式

A2 $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

A3 $\Box A \to \Box\Box A$

A4 $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

R1 **MP** $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

R2 **Nec** $\dfrac{A}{\Box A}$

算術的解釈

算術と様相論理を正確に結び付けるために，算術的解釈を導入する．

定義（算術的解釈）

命題変数全体の集合から，算術の文の集合への写像 f を**算術的解釈**という．

算術的解釈

算術と様相論理を正確に結び付けるために，算術的解釈を導入する．

定義（算術的解釈）

命題変数全体の集合から，算術の文の集合への写像 f を**算術的解釈**という．

算術的解釈 f は次を満たすように，命題様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f_T に一意に拡張できる：

- $f_T(p)$ は $f(p)$;
- $f_T(\bot)$ は $0 = 1$;
- f_T は結合子を保存;
- $f_T(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner f_T(A) \urcorner)$.

算術的解釈

算術と様相論理を正確に結び付けるために，算術的解釈を導入する．

定義（算術的解釈）

命題変数全体の集合から，算術の文の集合への写像 f を**算術的解釈**という．

算術的解釈 f は次を満たすように，命題様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f_T に一意に拡張できる：

- $f_T(p)$ は $f(p)$;
- $f_T(\bot)$ は $0 = 1$;
- f_T は結合子を保存;
- $f_T(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner f_T(A) \urcorner)$.

命題（算術的健全性）

$\mathbf{GL} \vdash A$ ならば，任意の算術的解釈 f について $T \vdash f_T(A)$.

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

$\mathsf{PL}(T) := \{A \mid \forall f\text{: 算術的解釈}, T \vdash f_T(A)\}$
を T の証明可能性論理という.

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

$\mathsf{PL}(T) := \{A \mid \forall f\text{: 算術的解釈}, T \vdash f_T(A)\}$
を T の証明可能性論理という.

命題（算術的健全性（再掲））

$\mathbf{GL} \subseteq \mathsf{PL}(T)$.

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

$\mathsf{PL}(T) := \{A \mid \forall f\text{: 算術的解釈}, T \vdash f_T(A)\}$
を T の証明可能性論理という．

命題（算術的健全性（再掲））

$\mathbf{GL} \subseteq \mathsf{PL}(T)$.

算術的完全性定理 (Solovay, 1976; Visser, 1984)

1. T が Σ_1-健全ならば $\mathsf{PL}(T) = \mathbf{GL}$.
2. T が Σ_1-健全でなければ $\mathsf{PL}(T)$ は $\mathbf{GL}$ か，ある $n \geq 1$ について $\mathbf{GL} + \Box^n \bot$.

- $\mathsf{PL}(T)$ は原始再帰的で T にはほとんど依存しない．
- 任意の T_0, T_1 について $\mathsf{PL}(T_0) \subseteq \mathsf{PL}(T_1)$ または $\mathsf{PL}(T_1) \subseteq \mathsf{PL}(T_0)$.

内容

1. 証明可能性論理と **Solovay** の定理
2. 述語証明可能性論理
3. 今回の研究

述語様相論理

- 算術的完全性定理を通じて，**GL** やクリプキモデルなどを用いて算術の証明可能性に関する分析を行うことができる.
- しかし，理論 T に依存した分析はできない.
- 枠組みを述語様相論理に拡張すれば，きめ細かな分析ができるのでは？

述語様相論理

- 算術的完全性定理を通じて，**GL** やクリプキモデルなどを用いて算術の証明可能性に関する分析を行うことができる.
- しかし，理論 T に依存した分析はできない.
- 枠組みを述語様相論理に拡張すれば，きめ細かな分析ができるのでは？

述語様相論理の言語

- 述語様相論理の言語は 1 階述語論理の言語に様相記号 $\Box$ と $\Diamond$ を加えたもの.
- ただし議論を単純にするために，定数記号と関数記号は用いないとする.

算術的解釈

算術的解釈の概念も拡張する.

定義（算術的解釈）

原子論理式全体の集合から，算術の論理式の集合への写像 f を**算術的解釈**という.
ただし $f(P(x_1, \ldots, x_n)) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ のとき，
任意の変数 $y_1, \ldots, y_n$ について $f(P(y_1, \ldots, y_n)) \equiv \varphi(y_1, \ldots, y_n)$ とする.

算術的解釈

算術的解釈の概念も拡張する.

定義（算術的解釈）

原子論理式全体の集合から，算術の論理式の集合への写像 f を**算術的解釈**という.
ただし $f(P(x_1, \ldots, x_n)) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ のとき，
任意の変数 $y_1, \ldots, y_n$ について $f(P(y_1, \ldots, y_n)) \equiv \varphi(y_1, \ldots, y_n)$ とする.

算術的解釈 f は次を満たすように，述語様相論理式全体の集合から算術の論理式の集合への写像 f_T に一意に拡張できる：

- $f_T(P(x_1, \ldots, x_n))$ は $f(P(x_1, \ldots, x_n))$;
- $f_T(\bot)$ は $0 = 1$;
- f_T は結合子，量化子を保存;
- $f_T(\Box A(x_1, \ldots, x_n))$ は $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner f_T(A(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n))\urcorner)$.

任意の述語様相論理式 φ について，φ と $f_T(\varphi)$ は等しい自由変数を持つ.

述語証明可能性論理

証明可能性論理の概念も拡張する.

述語証明可能性論理

$\mathsf{QPL}(T) := \{A \mid A$ は述語様相文で $\forall f$: 算術的解釈, $T \vdash f_T(A)\}$
を T の述語証明可能性論理という.

述語証明可能性論理

証明可能性論理の概念も拡張する．

述語証明可能性論理

$\mathsf{QPL}(T) := \{A \mid A$ は述語様相文で $\forall f$: 算術的解釈, $T \vdash f_T(A)\}$ を T の述語証明可能性論理という．

さて，命題論理のときのような状況が成立するだろうか．

問題（Boolos, 1979）

$\mathsf{QPL}(\mathbf{PA})$ は **r.e.** か？

Montagna の結果

述語論理においては，算術的完全性定理は成立しない．

定理（Vardanyan, 1985）

QPL($\mathbf{PA}$) は Π_2^0-完全．よって再帰的公理化不可能．

Montagna の結果

述語論理においては，算術的完全性定理は成立しない．

定理（Vardanyan, 1985）

QPL($\mathbf{PA}$) は Π^0_2-完全．よって再帰的公理化不可能．

更に QPL(T) は T に依存しそう．

定理（Montagna, 1984）

QPL($\mathbf{PA}$) $\not\subseteq$ QPL($\mathbf{BG}$).

理論の Σ_1 定義を明記した述語証明可能性論理

更に，QPL(T) は，T を定義する Σ_1 論理式にも依存する．

定義（Σ_1 定義）

論理式 $\sigma(v)$ が理論 T を**定義する**とは，任意の自然数 n について

$$\mathbb{N} \models \sigma(\overline{n}) \iff n \text{ は } T \text{ の公理の } \textbf{Gödel} \text{ 数}$$

を満たすことをいう．
T を定義する Σ_1 論理式を，T の **Σ_1 定義**という．

理論の Σ_1 定義を明記した述語証明可能性論理

更に，QPL(T) は，T を定義する Σ_1 論理式にも依存する．

定義（Σ_1 定義）

論理式 $\sigma(v)$ が理論 T を定義するとは，任意の自然数 n について

$$\mathbb{N} \models \sigma(\overline{n}) \iff n \text{ は } T \text{ の公理の } \mathbf{G\ddot{o}del} \text{ 数}$$

を満たすことをいう．
T を定義する Σ_1 論理式を，T の Σ_1 定義という．

諸定義

T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ について

- $\mathrm{Pr}_\sigma(x)$ を "x は σ によって定義される理論で証明可能" を意味する Σ_1 論理式とする（$\sigma(v)$ を用いて定めた $\mathrm{Pr}_T(x)$）．

理論の Σ_1 定義を明記した述語証明可能性論理

更に，QPL(T) は，T を定義する Σ_1 論理式にも依存する．

定義（Σ_1 定義）

論理式 $\sigma(v)$ が理論 T を定義するとは，任意の自然数 n について

$$\mathbb{N} \models \sigma(\overline{n}) \iff n \text{ は } T \text{ の公理の } \textbf{Gödel} \text{ 数}$$

を満たすことをいう．
T を定義する Σ_1 論理式を，T の Σ_1 定義という．

諸定義

T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ について

- $\mathrm{Pr}_\sigma(x)$ を "x は σ によって定義される理論で証明可能" を意味する Σ_1 論理式とする（$\sigma(v)$ を用いて定めた $\mathrm{Pr}_T(x)$）．
- 算術的解釈 f を $\mathrm{Pr}_\sigma(x)$ を用いて拡張したものを f_σ とかく．
  つまり $f_\sigma(\Box A(x_1, \ldots, x_n))$ は $\mathrm{Pr}_\sigma(\ulcorner f_\sigma(A(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n))\urcorner)$．

理論の Σ_1 定義を明記した述語証明可能性論理

更に，QPL(T) は，T を定義する Σ_1 論理式にも依存する．

定義（Σ_1 定義）

論理式 $\sigma(v)$ が理論 T を定義するとは，任意の自然数 n について

$$\mathbb{N} \models \sigma(\overline{n}) \iff n \text{ は } T \text{ の公理の Gödel 数}$$

を満たすことをいう．
T を定義する Σ_1 論理式を，T の Σ_1 定義という．

諸定義

T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ について

- $\mathrm{Pr}_\sigma(x)$ を "x は σ によって定義される理論で証明可能" を意味する Σ_1 論理式とする（$\sigma(v)$ を用いて定めた $\mathrm{Pr}_T(x)$）．
- 算術的解釈 f を $\mathrm{Pr}_\sigma(x)$ を用いて拡張したものを f_σ とかく．
つまり $f_\sigma(\Box A(x_1, \ldots, x_n))$ は $\mathrm{Pr}_\sigma(\ulcorner f_\sigma(A(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n))\urcorner)$．
- QPL$_\sigma(T) := \{A \mid A \text{ は述語様相文で } \forall f\text{: 算術的解釈}, T \vdash f_\sigma(A)\}$．

述語証明可能性論理の包含関係の不成立

定理（Artemov, 1986）

Σ_1-健全な T の任意の Σ_1 定義 $\sigma_0(v)$ に対して，
T の Σ_1 定義 $\sigma_1(v)$ が存在して，$\mathsf{QPL}_{\sigma_0}(T) \not\subseteq \mathsf{QPL}_{\sigma_1}(T)$.

述語証明可能性論理の包含関係の不成立

定理（Artemov, 1986）

Σ_1-健全な T の任意の Σ_1 定義 $\sigma_0(v)$ に対して，
T の Σ_1 定義 $\sigma_1(v)$ が存在して，$\mathsf{QPL}_{\sigma_0}(T) \nsubseteq \mathsf{QPL}_{\sigma_1}(T)$.

定理（K., 2013）

$0 < i < j$ とする.
$\mathbf{I\Sigma_i}$ の有限公理化の Σ_1 定義 $\sigma_i(v)$ があって，
$\mathbf{I\Sigma_j}$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma_j(v)$ について，

$$\mathsf{QPL}_{\sigma_i}(\mathbf{I\Sigma_i}) \nsubseteq \mathsf{QPL}_{\sigma_j}(\mathbf{I\Sigma_j}) \text{ かつ } \mathsf{QPL}_{\sigma_j}(\mathbf{I\Sigma_j}) \nsubseteq \mathsf{QPL}_{\sigma_i}(\mathbf{I\Sigma_i}).$$

内容

1. 証明可能性論理と **Solovay** の定理
2. 述語証明可能性論理
3. 今回の研究
    1. **Artemov** の補題とその帰結
    2. Σ_1 証明可能性論理

目標

研究の目標

- 述語証明可能性論理の間の包含関係に関する一般論を展開したい.
- 包含関係はめったに成立しなさそう.
- 包含関係からの帰結を分析することで，このことを確認する.

目標

研究の目標

- 述語証明可能性論理の間の包含関係に関する一般論を展開したい．
- 包含関係はめったに成立しなさそう．
- 包含関係からの帰結を分析することで，このことを確認する．

分析の主なツールは，**Vardanyan** の定理の証明に用いられた **Artemov** の補題．

Artemov の補題

ある $\mathcal{L}_A$-文 χ が存在して，$\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \chi$ かつ，
任意の算術的解釈 f，T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$，$\mathcal{L}_A$-文 φ について，

$$\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \mathrm{Con}_\sigma \wedge f_\sigma(\mathrm{D}) \wedge f_\sigma(\chi^\circ) \to (\varphi \leftrightarrow f_\sigma(\varphi^\circ)).$$

Artemov の補題の証明の概要を紹介する．
$\mathbf{I\Delta_0}$ の可算超準モデルで $+, \times, <$ が計算可能であるものは存在しないという **Tennenbaum** の定理の証明を応用する．

Artemov の補題の証明の概要 (1/3)

- $\mathcal{L}_A = \{0, S, +, M, <, =\}$ の各記号に対応する関係記号 $P_Z(x)$, $P_S(x, y)$, $P_A(x, y, z)$, $P_M(x, y, z)$, $P_L(x, y)$, $P_E(x, y)$ を用意.

Artemov の補題の証明の概要 (1/3)

- $\mathcal{L}_A = \{0, S, +, M, <, =\}$ の各記号に対応する関係記号 $P_Z(x)$, $P_S(x, y)$, $P_A(x, y, z)$, $P_M(x, y, z)$, $P_L(x, y)$, $P_E(x, y)$ を用意.
- $\mathcal{L}_A$-論理式 φ をこれらのみを用いた，同じ意味を持つ論理式 φ° に書き換える.
  例えば $S(0) = x$ だと，$\exists v(P_Z(v) \wedge P_S(v, x))$.

Artemov の補題の証明の概要 (1/3)

- $\mathcal{L}_A = \{0, S, +, M, <, =\}$ の各記号に対応する関係記号 $P_Z(x)$, $P_S(x, y)$, $P_A(x, y, z)$, $P_M(x, y, z)$, $P_L(x, y)$, $P_E(x, y)$ を用意.
- $\mathcal{L}_A$-論理式 φ をこれらのみを用いた，同じ意味を持つ論理式 φ° に書き換える.
  例えば $S(0) = x$ だと，$\exists v(P_Z(v) \wedge P_S(v, x))$.
- φ° は述語様相論理式.

Artemov の補題の証明の概要 (1/3)

- $\mathcal{L}_A = \{0, S, +, M, <, =\}$ の各記号に対応する関係記号 $P_Z(x)$, $P_S(x, y)$, $P_A(x, y, z)$, $P_M(x, y, z)$, $P_L(x, y)$, $P_E(x, y)$ を用意.
- $\mathcal{L}_A$-論理式 φ をこれらのみを用いた，同じ意味を持つ論理式 φ° に書き換える.
  例えば $S(0) = x$ だと，$\exists v(P_Z(v) \wedge P_S(v, x))$.
- φ° は述語様相論理式.
- 等号公理や十分に多くの算術の公理の **conjunction** χ について，χ° があれば，十分に強い算術が述語様相論理で展開できる.

Artemov の補題の証明の概要 (2/3)

- 算術的解釈 f について，$f(\chi^\circ)$ があれば，f で述語様相論理式を移した先で十分に強い算術を展開できる．

Artemov の補題の証明の概要 (2/3)

- 算術的解釈 f について，$f(\chi^\circ)$ があれば，f で述語様相論理式を移した先で十分に強い算術を展開できる．
- M を $\mathbf{I\Sigma_1}$ の任意のモデルで $f(\chi^\circ)$ を満たすものとする．

Artemov の補題の証明の概要 (2/3)

- 算術的解釈 f について，$f(\chi^\circ)$ があれば，f で述語様相論理式を移した先で十分に強い算術を展開できる．
- M を $\mathbf{I\Sigma_1}$ の任意のモデルで $f(\chi^\circ)$ を満たすものとする．
- 例えば $a +^{M_f} b$ を $M \models f(P_A(a, b, c))$ となる c と定めることで $|M|$ 上に $\mathcal{L}_A$-構造 M_f を定められる．

Artemov の補題の証明の概要 (2/3)

- 算術的解釈 f について，$f(\chi^\circ)$ があれば，f で述語様相論理式を移した先で十分に強い算術を展開できる．
- M を $\mathbf{I\Sigma_1}$ の任意のモデルで $f(\chi^\circ)$ を満たすものとする．
- 例えば $a +^{M_f} b$ を $M \models f(P_A(a, b, c))$ となる c と定めることで $|M|$ 上に $\mathcal{L}_A$-構造 M_f を定められる．
- $M \models f(\varphi^\circ) \iff M_f \models \varphi$ となる．

Artemov の補題の証明の概要 (2/3)

- 算術的解釈 f について，$f(\chi^\circ)$ があれば，f で述語様相論理式を移した先で十分に強い算術を展開できる．
- M を $\mathbf{I\Sigma_1}$ の任意のモデルで $f(\chi^\circ)$ を満たすものとする．
- 例えば $a +^{M_f} b$ を $M \models f(P_A(a, b, c))$ となる c と定めることで $|M|$ 上に $\mathcal{L}_A$-構造 M_f を定められる．
- $M \models f(\varphi^\circ) \iff M_f \models \varphi$ となる．
- $M \models f(\chi^\circ)$ のおかげで M_f は十分に強い算術のモデルとなる．

Artemov の補題の証明の概要 (2/3)

- 算術的解釈 f について，$f(\chi^\circ)$ があれば，f で述語様相論理式を移した先で十分に強い算術を展開できる．
- M を $\mathbf{I\Sigma_1}$ の任意のモデルで $f(\chi^\circ)$ を満たすものとする．
- 例えば $a +^{M_f} b$ を $M \models f(P_A(a,b,c))$ となる c と定めることで $|M|$ 上に $\mathcal{L}_A$-構造 M_f を定められる．
- $M \models f(\varphi^\circ) \iff M_f \models \varphi$ となる．
- $M \models f(\chi^\circ)$ のおかげで M_f は十分に強い算術のモデルとなる．
- 更に M は M_f のある **initial segment** と同型となる．

Artemov の補題の証明の概要 (3/3)

- 様相述語論理式 D を

$$\bigwedge_{K\in\{Z,S,A,M,L,E\}} (\forall\vec{x}(P_K(\vec{x}) \to \Box P_K(\vec{x}))\wedge\forall\vec{x}(\neg P_K(\vec{x}) \to \Box\neg P_K(\vec{x})))$$

と定める．

Artemov の補題の証明の概要 (3/3)

- 様相述語論理式 D を

$$\bigwedge_{K \in \{Z,S,A,M,L,E\}} (\forall \vec{x}(P_K(\vec{x}) \to \Box P_K(\vec{x})) \land \forall \vec{x}(\neg P_K(\vec{x}) \to \Box \neg P_K(\vec{x})))$$

  と定める.
- もし $M \models \mathrm{Con}_\sigma \land f_\sigma(\mathrm{D})$ なら

$$M \models \forall \vec{x} \left(f_\sigma(P_K(\vec{x})) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_\sigma(\ulcorner f_\sigma(P_K(\dot{\vec{x}})) \urcorner) \right)$$

$$M \models \forall \vec{x} \left(\neg f_\sigma(P_K(\vec{x})) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_\sigma(\ulcorner \neg f_\sigma(P_K(\dot{\vec{x}})) \urcorner) \right).$$

- $f_\sigma(P_K(\vec{x}))$ が M で Δ_1 となる.

Artemov の補題の証明の概要 (3/3)

- 様相述語論理式 D を

$$\bigwedge_{K\in\{Z,S,A,M,L,E\}} (\forall\vec{x}(P_K(\vec{x}) \to \Box P_K(\vec{x})) \land \forall\vec{x}(\neg P_K(\vec{x}) \to \Box\neg P_K(\vec{x})))$$

  と定める.
- もし $M \models \mathrm{Con}_\sigma \land f_\sigma(\mathrm{D})$ なら

$$M \models \forall\vec{x}\left(f_\sigma(P_K(\vec{x})) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_\sigma(\ulcorner f_\sigma(P_K(\dot{\vec{x}}))\urcorner)\right)$$

$$M \models \forall\vec{x}\left(\neg f_\sigma(P_K(\vec{x})) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_\sigma(\ulcorner \neg f_\sigma(P_K(\dot{\vec{x}}))\urcorner)\right).$$

- $f_\sigma(P_K(\vec{x}))$ が M で Δ_1 となる.
- **Tennenbaum** の定理の証明を応用すれば, $M_f \cong M$ が示せる.

Artemov の補題の証明の概要 (3/3)

- 様相述語論理式 D を

$$\bigwedge_{K \in \{Z,S,A,M,L,E\}} (\forall \vec{x}(P_K(\vec{x}) \to \Box P_K(\vec{x})) \land \forall \vec{x}(\neg P_K(\vec{x}) \to \Box \neg P_K(\vec{x})))$$

と定める.

- もし $M \models \mathrm{Con}_\sigma \land f_\sigma(\mathrm{D})$ なら

$$M \models \forall \vec{x} \left(f_\sigma(P_K(\vec{x})) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_\sigma(\ulcorner f_\sigma(P_K(\dot{\vec{x}}))\urcorner) \right)$$

$$M \models \forall \vec{x} \left(\neg f_\sigma(P_K(\vec{x})) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_\sigma(\ulcorner \neg f_\sigma(P_K(\dot{\vec{x}}))\urcorner) \right).$$

- $f_\sigma(P_K(\vec{x}))$ が M で Δ_1 となる.
- **Tennenbaum** の定理の証明を応用すれば, $M_f \cong M$ が示せる.
- $M \models \varphi \overset{\cong}{\iff} M_f \models \varphi \iff M \models f_\sigma(\varphi^\circ)$.

Artemov の補題の応用

Artemov の補題から，次が得られる．

命題（Visser and de Jonge, 2006）

T の任意の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ と任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，以下は同値：

1. $T + \mathrm{Con}_\sigma \vdash \varphi$.
2. $\neg\Box\bot \land \mathrm{D} \land \chi^\circ \to \varphi^\circ \in \mathsf{QPL}_\sigma(T)$.

Artemov の補題の応用

Artemov の補題から，次が得られる．

命題（Visser and de Jonge, 2006）

T の任意の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ と任意の $\mathcal{L}_A$-文 φ について，以下は同値：

1. $T + \mathrm{Con}_\sigma \vdash \varphi$.
2. $\neg\Box\bot \land \mathrm{D} \land \chi^\circ \to \varphi^\circ \in \mathsf{QPL}_\sigma(T)$.

系

$\mathsf{QPL}_{\sigma_0}(T_0) \subseteq \mathsf{QPL}_{\sigma_1}(T_1)$ ならば $T_1 + \mathrm{Con}_{\sigma_1} \vdash T_0 + \mathrm{Con}_{\sigma_0}$.

Proof.

$\mathsf{QPL}_{\sigma_0}(T_0) \subseteq \mathsf{QPL}_{\sigma_1}(T_1)$ と仮定する．
$T_0 + \mathrm{Con}_{\sigma_0} \vdash \varphi$ ならば命題より $\neg\Box\bot \land \mathrm{D} \land \chi^\circ \to \varphi^\circ \in \mathsf{QPL}_{\sigma_0}(T_0)$.
仮定より $\neg\Box\bot \land \mathrm{D} \land \chi^\circ \to \varphi^\circ \in \mathsf{QPL}_{\sigma_1}(T_1)$.
再び命題より $T_1 + \mathrm{Con}_{\sigma_1} \vdash \varphi$. □

結果

Visser and de Jonge の結果に触発され，**Artemov** の補題を用いて，述語証明可能性論理の包含関係の帰結をいろいろと得ることができた．

定理 (K.)

$\mathsf{QPL}_{\sigma_0}(T_0) \subseteq \mathsf{QPL}_{\sigma_1}(T_1)$ のとき

1. $T_1 \vdash \mathrm{Con}_{\sigma_0} \leftrightarrow \mathrm{Con}_{\sigma_1}$;
2. $T_1 \vdash_{\Sigma_1} T_0$;
3. $T_0 \vdash$ **PA** ならば，任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 $\varphi(\vec{x})$ について
$$T_1 \vdash \forall \vec{x} \left(\mathrm{Pr}_{\sigma_0 + \mathrm{Con}_{\sigma_0}}(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_{\sigma_1 + \mathrm{Con}_{\sigma_1}}(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \right);$$
4. $T_0 \vdash$ **PA** ならば，任意の Π_1 論理式 $\varphi(\vec{x})$ について
$$T_1 \vdash \forall \vec{x} \left(\mathrm{Pr}_{\sigma_1}(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\sigma_0}(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \right).$$

つまり，これらの条件のうちのどれか一つでも成立しなければ，述語証明可能性論理の間の包含関係は成立しない．

結果について

結果について

- これらの結果から，述語証明可能性論理の間の包含関係はめったに成立しないと言っても良いだろう．
- $\mathrm{Pr}_T(x)$ に関する，理論に依存した細かな分析を行いたい，という述語証明可能性論理に期待する状況が成立していることが確認できたともいえる．

問題

$\mathsf{QPL}_{\sigma_0}(T_0) \subseteq \mathsf{QPL}_{\sigma_1}(T_1)$ という条件を特徴付けることはできるか？

内容

1. 証明可能性論理と **Solovay** の定理
2. 述語証明可能性論理
3. 今回の研究
    1. **Artemov** の補題とその帰結
    2. Σ_1 証明可能性論理

Σ_1 証明可能性論理

制限された算術的解釈に関する分析もこれまでに行われてきた.

定義（Σ_1 算術的解釈）

算術的解釈 f が Σ_1 であるとは,

- 命題論理の場合：任意の命題変数 p について $f(p)$ が Σ_1 文
- 述語論理の場合：任意の原子論理式 $P(\vec{x})$ について $f(P(\vec{x}))$ が Σ_1 論理式

であることをいう.

Σ_1 証明可能性論理

制限された算術的解釈に関する分析もこれまでに行われてきた.

定義（Σ_1 算術的解釈）

算術的解釈 f が Σ_1 であるとは,

- 命題論理の場合：任意の命題変数 p について $f(p)$ が Σ_1 文
- 述語論理の場合：任意の原子論理式 $P(\vec{x})$ について $f(P(\vec{x}))$ が Σ_1 論理式

であることをいう.

定義（Σ_1 証明可能性論理）

- $\mathsf{PL}^{\Sigma_1}(T)$ $:= \{A \mid A$ は命題様相論理式で $\forall f$: Σ_1 算術的解釈, $T \vdash f_T(A)\}$
- $\mathsf{QPL}^{\Sigma_1}(T)$ $:= \{A \mid A$ は述語様相文で $\forall f$: Σ_1 算術的解釈, $T \vdash f_T(A)\}$
- $\mathsf{QPL}^{\Sigma_1}_{\sigma}(T)$ $:= \{A \mid A$ は述語様相文で $\forall f$: Σ_1 算術的解釈, $T \vdash f_\sigma(A)\}$

Σ_1 証明可能性論理に関する事実

命題論理については再帰的公理化可能.

定理（Visser, 1981）

T が Σ_1-健全ならば $\mathsf{PL}^{\Sigma_1}(T) = \mathbf{GLV}$.

Σ_1 証明可能性論理に関する事実

命題論理については再帰的公理化可能.

定理（Visser, 1981）

T が Σ_1-健全ならば $\mathsf{PL}^{\Sigma_1}(T) = \mathbf{GLV}$.

述語論理については **Vardanyan** の定理と同様の状況が成立.

定理（Berarducci, 1989）

$\mathsf{QPL}^{\Sigma_1}(\mathbf{PA})$ は Π^0_2-完全.

Σ_1 Artemov の補題

- Σ_1 算術的解釈を考えることには大きな利点がある．
- **Artemov** の補題の証明において，$\mathrm{Con}_\sigma \wedge f_\sigma(\mathrm{D})$ は，$f(P_K(\vec{x}))$ が M 上で Δ_1 であることを示すために用いた．
- f が Σ_1 算術的解釈であればこの議論が必要なくなる．例えば $f(P_Z(x)) \leftrightarrow \forall y \neg f(P_S(y,x))$ なので $f(P_Z(x))$ は Δ_1．

Σ_1 Artemov の補題

- Σ_1 算術的解釈を考えることには大きな利点がある．
- **Artemov** の補題の証明において，$\mathrm{Con}_\sigma \land f_\sigma(\mathrm{D})$ は，$f(P_K(\vec{x}))$ が M 上で Δ_1 であることを示すために用いた．
- f が Σ_1 算術的解釈であればこの議論が必要なくなる．
  例えば $f(P_Z(x)) \leftrightarrow \forall y \neg f(P_S(y, x))$ なので $f(P_Z(x))$ は Δ_1．

Σ_1 Artemov の補題

ある $\mathcal{L}_A$-文 χ が存在して，$\mathbf{I\Sigma_1} \vdash \chi$ かつ，
任意の Σ_1 算術的解釈 f，T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$，$\mathcal{L}_A$-文 φ について，

$$\mathbf{I\Sigma_1} \vdash f_\sigma(\chi^\circ) \to (\varphi \leftrightarrow f_\sigma(\varphi^\circ)).$$

Σ_1 証明可能性論理の包含関係

Σ_1 **Artemov** の補題を用いれば，次が証明できた．

定理 (K.)

以下は同値：

1. $\mathsf{QPL}^{\Sigma_1}_{\sigma_0}(T_0) \subseteq \mathsf{QPL}^{\Sigma_1}_{\sigma_1}(T_1)$.
2. $T_1 \vdash T_0$ かつ，任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 $\varphi(\vec{x})$ について

$$T_1 \vdash \forall \vec{x} \left(\mathrm{Pr}_{\sigma_0}(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_{\sigma_1}(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \right).$$

参考文献

1. S. Artemov. Numerically correct logics of provability. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 290, no. 6, pp. 1289–1292 (1986).
2. F. Montagna. The predicate modal logic of provability. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 25, no. 2, pp. 179–189 (1984).
3. T. Kurahashi. On predicate provability logics and binumerations of fragments of Peano arithmetic. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 52, no. 7-8, pp. 871–880 (2013).
4. T. Kurahashi. On inclusions between predicate provability logics. 準備中.
5. A. Visser and M. de Jonge. No escape from Vardanyan's theorem. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 45, no. 5, pp. 539–554 (2006).