AND-OR 木の最適な乱択アルゴリズムの非一意性

伊藤風輝 [1]

2020 年 12 月 20 日

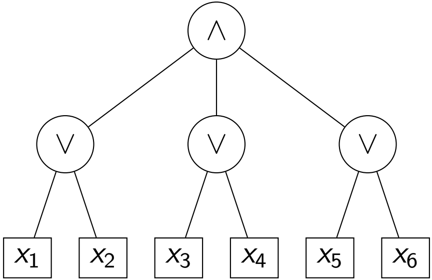
[1]東京都立大学大学院理学研究科 数理科学専攻

1. AND-OR 木とは何か?
   - ブール関数の計算量
   - 過去の結果
   - 木の転置
2. 主結果
   - [仁井田・小川] の拡張
   - TR と連結成分の関係
   - 未解決の問題

1. AND-OR 木とは何か?
   - ブール関数の計算量
   - 過去の結果
   - 木の転置
2. 主結果
   - [仁井田・小川] の拡張
   - TR と連結成分の関係
   - 未解決の問題

ブール関数の計算量

- AND-OR 木 $\cdots$ ブール関数を木の形で表したもの
- 変数探索の回数で計算コストを定める (回路計算量とは異なる)

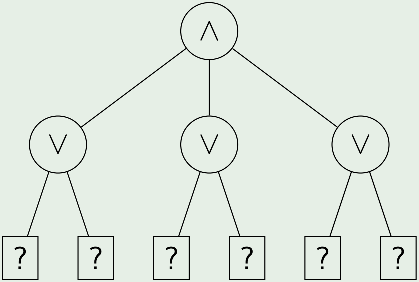


$$f(x_1, \ldots, x_6) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_5 \vee x_6)$$

ブール関数の計算量

例

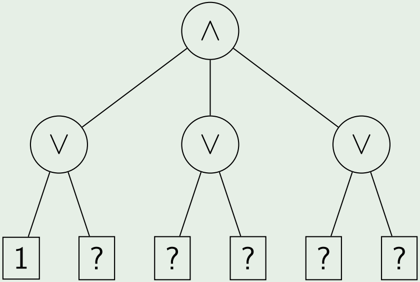
アルゴリズム A: $x_1 \to \cdots \to x_6$, 付値 $\omega =$10 00 11



ブール関数の計算量

例

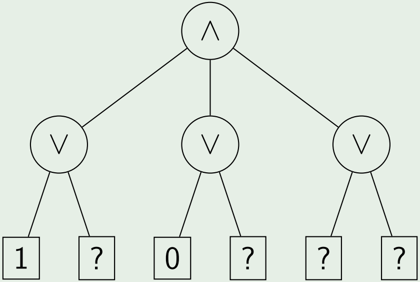
アルゴリズム A: $x_1 \to \cdots \to x_6$, 付値 ω =10 00 11



ブール関数の計算量

例

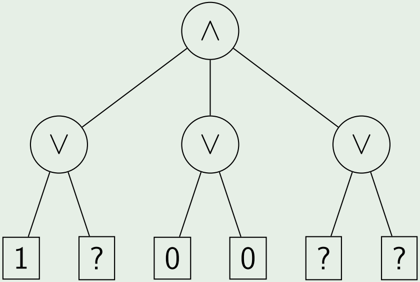
アルゴリズム A: $x_1 \to \cdots \to x_6$, 付値 ω =10 00 11



ブール関数の計算量

例

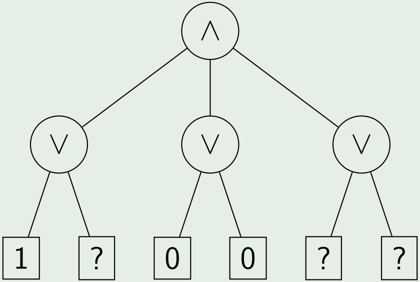
アルゴリズム A: $x_1 \to \cdots \to x_6$, 付値 $\omega =$10 00 11



ブール関数の計算量

例

アルゴリズム A: $x_1 \to \cdots \to x_6$, 付値 ω =10 00 11



$f(\omega) = 0$. コストは $C(A, \omega) = 3$.

ブール関数の計算量

- 関数の最悪計算量: k (変数の個数)
- アルゴリズムか付値どちらか一方をランダムにするとどうなるか?

定義

深さ優先かつ $\alpha\beta$ カットを行うアルゴリズムの全体を $\mathcal{A}_D$ とし, 付値の全体を $\mathcal{W}$ とする. $\mathcal{A}_D$ 上の確率分布 A_R を<u>乱択アルゴリズム</u>と呼ぶ.

ブール関数の計算量

定義

ランダムな決定を許す場合のコスト (期待値) は, 乱択アルゴリズムの場合は

$$C(A_R, \omega) = \sum_{A \in \mathcal{A}_D} A_R(A) C(A, \omega).$$

付値の確率分布を考える場合は

$$C(A, d) = \sum_{\omega \in \mathcal{W}} d(\omega) C(A, \omega).$$

ブール関数の計算量

定義

木 T の randomized complexity を,

$$R(T) = \min_{A_R} \max_{\omega} C(A_R, \omega),$$

T の distributional complexity を,

$$P(T) = \max_{d} \min_{A} C(A, d)$$

で定める. ここで d は $\mathcal{W}$ 上の確率分布.

過去の結果

定理 (Yao 77)

$R(T) = P(T).$

定理 (Saks&Wigderson 86)

高さ h の完全 2 分木 T_2^h に対し，変数の個数を k とすれば

$$R(T_2^h) = O\left[\left(\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right)^h\right] = O(k^{0.753\cdots})$$

過去の結果

- $R(T)$ を達成する A_R(最適アルゴリズム) や, $P(T)$ を達成する d(固有分布) は何か?

定理 (Peng et. al. 16)

Balanced tree T について,
(1) $\mathcal{A}_D$ に対する固有分布は一意で, それは一様分布.
(2) $\mathcal{A}_{dir}$ *(*指向性アルゴリズム全体*)* に対する固有分布は無限に存在する.

木の転置

固有分布の一意性証明には, [Suzuki&Nakamura 12] によって導入された木の転置 (transposition) という概念が用いられている.

例

先の図において, 根ノードでの左端と中央の子ノードの転置 $\mathrm{tr}_1^{\varepsilon}$ を考える.

- 葉ノード ℓ_1(x_1 のところ) に対して, $\mathrm{tr}_1^{\varepsilon}(\ell_1) = \ell_3$.
- 付値 $\omega =$10 01 11 に対して, $\mathrm{tr}_1^{\varepsilon}(\omega) =$01 10 11
- アルゴリズム $A : x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_6$ に対して, $(A) : x_3 \to x_4 \to x_1 \to x_2 \to x_5 \to x_6$.

木の転置

木 T の転置の合成の全体を $\mathrm{TR}(T)$, あるいは単に TR と書く.

注意

- 木の転置は群論における置換の特別な場合である. 上の例で言えば, x_1 の場所と x_3 の場所を入れ替えるだけ, という操作は考えない.
- 変数の個数 k に対して TR は S_k の正規ではない部分群.

木の転置

定義

付値 ω に対し, $\langle\omega\rangle = \{f(\omega) : f \in \mathrm{TR}\}$ を ω の閉包 (closure) あるいは連結成分という. アルゴリズム $A \in \mathcal{A}_D$ に対しても $\langle A\rangle$ を同様に定める.

定理 (仁井田・小川 13)

T を完全 2 分木とする. 連結成分 $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_D$ 上の一様分布 A_R^u は $\mathcal{W}$ に対して最適. つまり,

$$\max_{\omega\in\mathcal{W}} C(A_R^u, \omega) = R(T).$$

木の転置

定理 (仁井田 13)

$\mathcal{A}_{dir}$ 上 $\mathcal{W}$ に対して最適な乱択アルゴリズムは非可算無限個存在する.

最適戦略の一意性	完全 2 分木	balanced
付値 (対 $\mathcal{A}_D$)	○	○
付値 (対 $\mathcal{A}_{dir}$)	×	×
$\mathcal{A}_{dir}$ 上の乱択	×	
$\mathcal{A}$ 連結閉上の乱択		

本発表では, 空白の箇所について部分的な回答を与える.

1. AND-OR 木とは何か?
   - ブール関数の計算量
   - 過去の結果
   - 木の転置
2. 主結果
   - [仁井田・小川] の拡張
   - TR と連結成分の関係
   - 未解決の問題

[仁井田・小川] の拡張

以下, balanced tree T のみを考える. [仁井田・小川 13] で示されていたことは, balanced tree の場合にも同様に成り立つ.

定理 (乱択アルゴリズムのノーフリーランチ定理)

$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_D$, $\Omega \in \mathcal{W}$ を連結成分とする. このとき,

$$\sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega)$$

は $A_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ によらず一定.

[仁井田・小川] の拡張

命題

$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_D$, $\Omega \subset \mathcal{W}$ を連結成分とする. $A_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対して以下は同値.

(a) A_R は A 上 Ω に対して最適.

(b) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $C(A_R, \omega)$ 一定.

(c) $\mathcal{A}$ 上一様分布 A_R^u に対してある $\alpha \in \Omega$ があって

$$\max_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) = C(A_R^u, \alpha).$$

(d) $\max_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) = \dfrac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega).$

[仁井田・小川] の拡張

定理

連結成分 $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_D$ 上の一様分布 A_R^u は $\mathcal{W}$ に対して最適. つまり,

$$\max_{\omega \in \mathcal{W}} C(A_R^u, \omega) = R(T).$$

証明の概略. $R(T) = \min_{A_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})} \max_{\omega \in \mathcal{W}} C(A_R, \omega)$ が成り立つので, A_R^u が $\mathcal{A}$ 上で最適であることを示せば十分. W を $\mathcal{W} = \langle \omega_1 \rangle \cup \cdots \cup \langle \omega_m \rangle$ と連結成分に分解し, 各成分に関するコストの最大値を比較すればよい.

TR と連結成分の関係

以下, 写像の合成に関して $f \circ g(x) = g(f(x))$ としていることに注意.

定義

$f \in \mathrm{TR}$ に対して $f = \mathrm{tr}_{\sigma_1}^{u_1} \circ \cdots \circ \mathrm{tr}_{\sigma_m}^{u_m}$ が成り立つとき, 転置の列 $(\mathrm{tr}_{\sigma_1}^{u_1}, \ldots, \mathrm{tr}_{\sigma_m}^{u_m})$ を f の分解 (decomposition) と呼ぶ. 特に, この列に重複がなく, さらに TR における順序を守っているとき, f の標準形 (normal form) と呼ぶ.

定理

標準形は一意に存在する. つまり, TR は有限群.

TR と連結成分の関係

定理

$\mathcal{A}$ をアルゴリズムの連結成分とする. $A \in \mathcal{A}$, $f \in \mathrm{TR}$ に対して, f が恒等写像でなければ $f(A) \neq (A)$. つまり $|\mathrm{TR}| = |\mathcal{A}|$.

定理

付値の連結成分 $\Omega \subset \mathcal{W}$ に対して $|\mathrm{TR}| < |\Omega|$. 正確には,

$$2 \leq \frac{|\mathrm{TR}|}{|\Omega|} \in \mathbb{N}.$$

TR と連結成分の関係

定理 (主結果)

T は高さ 2 以上であるとする．連結成分 $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_D, \Omega \subset \mathcal{W}$ に対して, $\mathcal{A}$ と Ω に制限された *randomized complexity* を達成する A_R, すなわち

$$\max_{\omega \in \Omega} C(A_R, \omega) = \min_{A'_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})} \max_{\omega \in \Omega} C(A'_R, \omega)$$

を満たす乱択アルゴリズム $A_R \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ は非可算無限個存在する．

証明の概略...
$m = |\mathrm{TR}|$ とする．上の命題から最適なアルゴリズムは一様分布 A_R^u とコストが等しい．乱択アルゴリズム A_R は各 $A \in \mathcal{A}$ に対する確率で定義されているから，$\mathbb{R}^m$ の点だと思うことができる．いま $A \in \mathcal{A}$ と $\omega \in \Omega$ を固定し，行列

$$M = \begin{bmatrix} C(f_1(A), f_1(\omega)) & \cdots & C(f_1(A), f_m(\omega)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(f_m(A), f_1(\omega)) & \cdots & C(f_m(A), f_m(\omega)) \end{bmatrix}$$

を考える．上述の定理から方程式 $Mx = 0$ の解空間 S_Ω は 1 次元以上．すると S_Ω を原点近くに制限した集合 S'_Ω で，最適な A_R と一対一対応するようなものを作れる．

未解決の問題

最適戦略の一意性	完全 2 分木	balanced
付値 (対 $\mathcal{A}_D$) 付値 (対 $\mathcal{A}_{dir}$)	○ ×	○ ×
$\mathcal{A}_{dir}$ 上の乱択 $\mathcal{A}$ 連結閉上の乱択	×	

この表を埋めるにはどうすれば良いのか?

(1) $S' := \bigcap_{\Omega:closure} S'_\Omega$ の元は全て $R(T)$ を達成するから，これが無限集合なら残りの空欄は全て×.

未解決の問題

(2) [仁井田 2013] の次の定理を一般の場合にも示せればよいのだが, 同じ方法では証明できない.

定理 (仁井田 13)

完全 2 分木 T を考える. $\mathcal{A}_{dir}$ 上の乱択アルゴリズム A_R が 0-セットおよび 1-セットに対して最適なら, 付値の全体 $\mathcal{W}$ に対しても最適.

0-セット, 1-セットは [Liu&Tanaka 07] が導入した概念で, どちらも付値の連結成分である. この定理は $S'_{(0-set)} \cap S'_{(1-set)} \subset S'$ を意味する. 左辺が無限集合なら残りの空欄は全て×.

参考文献

[Yao 77] A. Yao, "Probabilistic computations: Toward a unified measure of complexity," *18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 222-227, 1977.

[Saks&Wigderson 86] M. Saks and A. Wigderson, "Probabilistic Boolean decision trees and the complexity of evaluating game trees," *27th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 29-38, 1986.

[Liiu&Tanaka] C. G. Liu and K. Tanaka, "Eigen-distribution on random assignments for game trees," *Information Processing Letters,* vol. 104, no. 2, pp.73-77, 2007.

参考文献

[Suzuki&Nakamura 12] T. Suzuki and R. Nakamura, "The eigen distribution of an AND-OR tree under directional algorithms," *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, vol.42, no. 2, pp. 122-128, 2012.

[Peng et. al. 16] Peng et al. "The Uniqueness of Eigen-distribution under Non-directional Algorithms," *IAENG International Journal of Computer Science*, 43, Vol.3, 2016.

[仁井田・小川 2013] 仁井田・小川, "完全二分 AND-OR 木上の最適な乱択アルゴリズムについて," 数理解析研究所考究録 第 1832 巻 158-176, 2013

[仁井田 2013] 仁井田, "完全二分 AND-OR 木上の最適な乱択アルゴリズムについて," 修士論文, 東京都立大学機関リポジトリ, 2013. http://hdl.handle.net/10748/5633